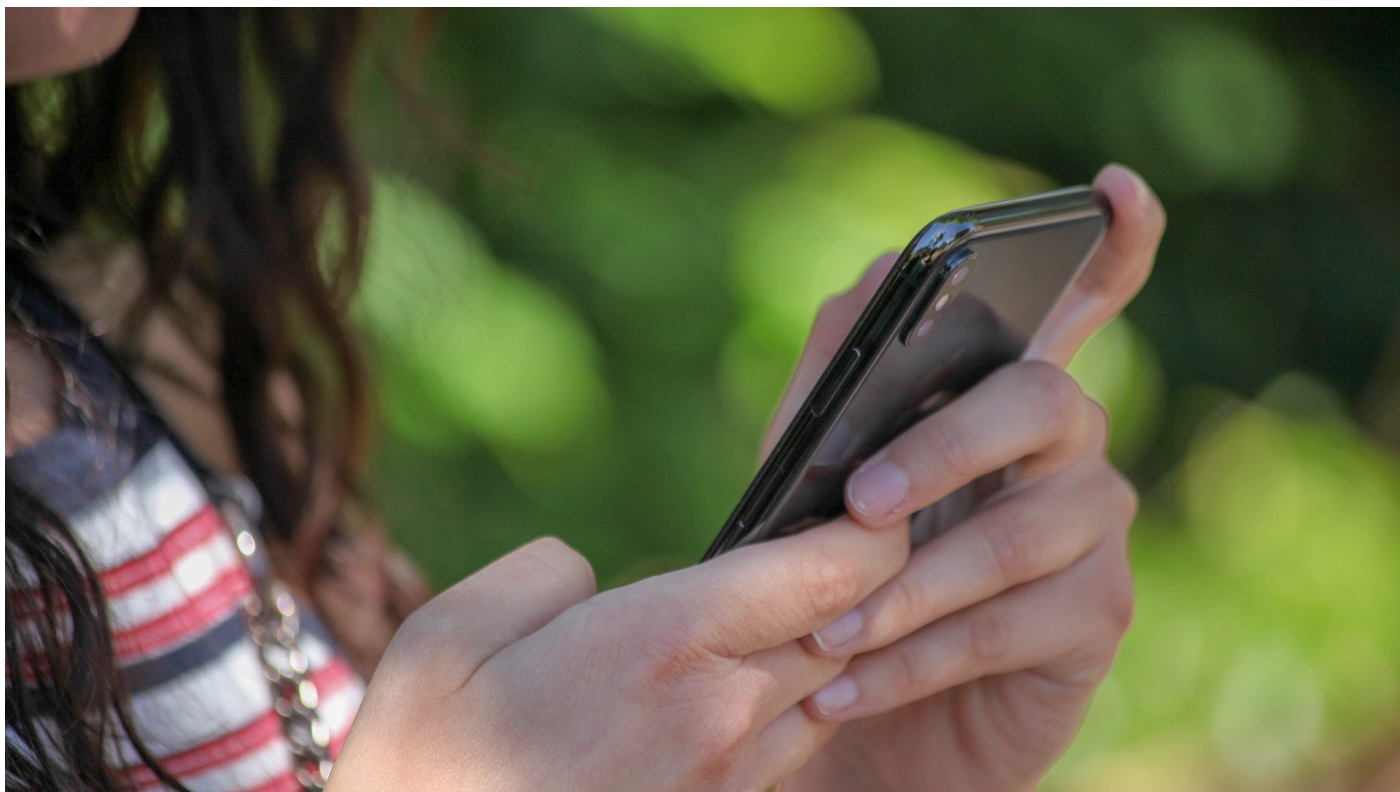


Problème 171 – Les data du téléphone portable

Niveau : Terminale (Spécialité Maths)

Chapitres : Étude de fonctions, Convexité, Algorithmique

Inédit, publié le 11/11/2020



Bien qu'il soit un terme anglais, le mot « data » est entré dans notre jargon courant. Le volume de data traduit la quantité de données reçues en communication cellulaire, hormis la voix et les SMS. Dans une journée, un lycéen va en consommer plus ou moins, selon ce qu'il fait avec son téléphone : chat, mail, musique, vidéo, travail (euh...) ... Dans ce problème, nous allons justement proposer une modélisation simplifiée de ce que peut être cette consommation au lycée.

Titia, une lycéenne, est une grande utilisatrice de son téléphone portable. En ce jour de classe, comme nombre de ses camarades, elle se réveille à 6h00 et allume son téléphone qui était éteint. Elle l'utilise de manière sensible jusqu'au moment où elle va en cours, le met en mode silence toute la journée (*NB : nous reconnaissons que ce cas est sans doute complètement idéal !*) puis commence à le réutiliser progressivement quand elle sort de sa dernière heure de cours, et ce de manière croissante jusqu'à ce qu'elle éteigne son portable, à 22 h 30 pile. On modélise cette situation de manière simplifiée par une fonction f qui au temps t écoulé en heures depuis 6 heures du matin (donc à 6 heures, $t = 0$) associe la quantité de data, en mégaoctets (Mo), que Titia a déjà consommés dans son forfait dans ce mois.

La fonction f définie sur $[0; 16,5]$ est telle que : $f(t) = 0,2(t - 7)^3 + 0,1t^2 + 1500$

On arrondira tous les résultats au dixième près.

- 1) a) Combien de data (en Mo) Titia a-t-elle déjà consommés dans le mois quand elle allume son portable ? Et quand elle l'éteint le soir ?
- b) Calculer quelques valeurs de f et tracer la courbe (C) représentative de la fonction f en **Annexe 1**.

- 2) a) Que représente $f'(t)$ dans le cadre de ce problème ?
 b) Sans même en calculer l'expression, pourquoi peut-on conjecturer, dans le cadre du problème, que pour tout t de l'intervalle $[0; 16,5]$, $f'(t) \geq 0$?
 c) Calculer l'expression de $f'(t)$ en fonction de t , en développant, réduisant et ordonnant l'expression obtenue.
 d) Vérifier qu'il n'existe pas de valeur réelle telle que $f'(t) = 0$. Qu'est-ce que cela signifie pour le téléphone portable de Titia durant la journée ?
 e) Prouver la conjecture émise à la question 2.b) (l'inégalité devenant même stricte, selon 2.d)).
- 3) a) Déterminer l'instant précis t_0 de la journée où la consommation en data de Titia est la plus faible.
 b) A quel horaire de la journée de Titia, en heures et minutes, cet instant t_0 correspond-t-il ?
 c) Quelle est, en Mo/h, la consommation instantanée en data de Titia à cet instant t_0 précis ?
 d) Que représente le point A de coordonnées $(t_0, f(t_0))$ pour la courbe (C)?
- 4) a) Démontrer qu'il existe exactement 2 instants t_1 et t_2 , avec $t_1 < t_0 < t_2$, tels que la consommation instantanée de data de Titia soit égale à 20 Mo/h.
 b) Recopier et remplir l'algorithme Python ci-dessous afin qu'il donne une valeur approchée de t_2 au dixième près.

```

1 from scipy import misc
2 def f(x):
3     return 0.2*(x-7)**3+0.1*x**2+15
4 a=...
5 b=...
6 while b-a>... :
7     m=(a+b)/2
8     if misc.derivative(f,m)<... :
9         a=m
10    else:
11        ...
12 print(round(a,1))

```

Note : on rappelle que la fonction `misc.derivative(f,x)`, importée de la bibliothèque `scipy`, retourne la valeur $f'(x)$.

Annexe 1

